Gioco coi numeri. *Tratto da "La Settimana Enigmistica" n.3929, Luglio 2007, Quesito con la Susi n.856.*

Su una lavagna sono scritte le cifre da 9 a 1, in ordine decrescente. Si possono inserire dei segni "+" tra una cifra e l'altra oppure mantenere le cifre consecutive, formando così una somma: ad esempio 9+8+7+65+4+3+2+1 è una possibile soluzione, mentre 98+76+54+3+21 è un'altra soluzione. Il valore di ogni soluzione è dato dal numero che si ottiene come somma: ad esempio nel primo caso sopra indicato la somma è pari a 99, mentre nel secondo caso è pari a 252. Si vuole ottenere la somma maggiore possibile, purché non superiore a 1000.

Formulare il problema generale in cui è dato un numero quasiasi di cifre qualsiasi e la soglia da non superare può essere un numero qualsiasi.

Soluzione.

Dati. E' dato un insieme indicizzato N di n cifre in ordine prestabilito. Indichiamo con a_i il valore della cifra in posizione $i \in N$. Sia S il valore soglia da non superare.

Variabili. Usiamo variabili binarie per assegnare ad ogni posizione $i \in N$ un possibile peso (unità, decine, centinaia) che la cifra i può assumere. L'insieme dei pesi possibili si può stimare per eccesso come $p = \lceil \log_{10} S \rceil$. Si ha quindi un insieme indicizzato P di pesi con indice $j = 0, \ldots, p$. Definiamo quindi una variabile binaria per ogni coppia posizione-peso. Abbiamo quindi le variabili binarie x_{ij} che assumono valore 1 se e solo se la cifra in posizione i ha peso 10^j.

Funzione obiettivo. Si vuole massimizzare la somma dei numeri ottenuti, che è la somma delle n cifre, ciascuna moltiplicata per il suo peso. La funzione obiettivo si esprime quindi semplicemente come

$$\text{maximize } z = \sum_{i \in N} \sum_{j \in P} 10^j x_{ij}.$$

Vincoli. I vincoli del problema impongono che ogni cifra abbia esattamente un peso. Esiste pertanto un vincolo per ogni posizione $i \in N$:

$$\sum_{j \in P} x_{ij} = 1 \ \ \forall i \in N.$$

Inoltre se la cifra in posizione i ha un peso di indice $j > 0$, allora la cifra in posizione $i + 1$ deve avere necessariamente un peso di indice $j - 1$. Ciò si può esprimere facilmente come condizione logica sulle variabili binarie:

$$x_{ij} \leq x_{i+1,j-1} \ \ \forall i \in N \ \ \forall j \in P : j > 0 and i < n.$$

Un ulteriore vincolo apposito è imposto sull'ultima cifra che deve necessariamente avere il peso delle unità ($j = 0$)

$$x_{n0} = 1.$$

Dalla facilità con cui si esprimono questi vincoli si può apprezzare il motivo della scelta delle variabili. Un ultimo vincolo impone che la somma sia non superiore a S:

$$\sum_{i \in N} \sum_{j \in P} 10^j x_{ij} \leq S.$$

Il modello matematico completo risulta quindi di PLI con variabili binarie.

La soluzione è garantita essere ottima, non necessariamente unica.

Nell'esempio proposto una soluzione ottima è $9 + 8 + 7 + 654 + 321 = 999$.